Conceptualisation, registres de représentations sémiotiques et noétique:

interactions constructivistes dans l'apprentissage des concepts mathématiques et hypothèse sur quelques facteurs inhibant la dévolution [1]

D'Amore B. (2001). Conceptualisation, registres de représentations sémiotiques et noétique: interactions constructivistes dans l'apprentissage des concepts mathématiques et hypothèse sur quelques facteurs inhibant la dévolution. *Scientia Paedagogica Experimentalis*. Gent, Belgio. XXXVIII, 2, 143-168.

Bruno D'Amore

N.R.D.
Nucleo di Ricerca in
Didattica della Matematica
Dipartimento di Matematica
Università di Bologna

Facoltà di Scienze
della Formazione
Libera Università di Bolzano
Freie Universität Bozen
Bressanone – Brixen (Bz)

Resumé. Ce travail s'inspire aux études dont Raymond Duval (1988a,b,c, 1993) a été indiscutablement le pionnier, et il se situe dans le filon des recherches du NRD de Bologne, ces dernières visant à retracer et à mettre en évidence les différentes hypothèses à la base de la dévolution manquée (Perrin Glorian, 1994), et donc à la base de la scolarisation du savoir mathématique (D´Amore, 1999a).

Summary. This study derives inspiration from the original discussions of Raymond Duval (1988a,b,c 1993), and forms part of the research being done by the NRD of Bologna University. It attempts to draw out and to substantiate the diverse hypotheses that lie at the foundations of unsuccessful devolution (Perrin Glorian, 1994), and therefore also at the foundations of the schooling of mathematical awareness (D'Amore, 1999a).

Sumario. Este trabajo se inspira en los estudios en los que ha sido pionero indiscutible Raymond Duval (1988a,b,c; 1993), y se sitúa en la línea de investigación del NRD de Bolonia, que busca localizar y evidenciar las

[1] Travail exécuté dans le cadre du Programme de recherche locale (ex 60%): *Recherches sur le fonctionnement du système élève-enseignant-savoir: motivations de la dévolution manquée*.

diferentes hipótesis que se hallan en la base de la falta de devolución (Perrin Glorian, 1994), y por lo tanto en la base de la escolarización del saber matemático (D´Amore, 1999a).

1. Concept et conceptualisation

Qu'est-ce qu'un "concept"?
Dans (D'Amore, 1999b, pages 193-208) j'ai tenté de presenter les idées fondamentales pour essayer de répondre à cette question apparemment naïve. Cependant ce qu'on constate avec une certitude absolue n'est que la complexité immense de la "définition" de ce mot… Et cela pour plusieurs raisons.
Une des difficultés réside dans la multiplicité des facteurs et des causes participant à l'idée de "concept". Pour expliquer cela brièvement, et donc de façon incomplète, au lieu d'affirmer que le "concept de droite" (pourvu qu'il existe), est celui que conçoivent les savants qui ont dédié leurs études et leurs réflexions à cette question, il faudrait plutôt dire qu'il y a une forte composante "anthropologique" pour ainsi dire, mettant en évidence l'importance des relations entre $R_I(X,O)$ [rapport institutionnel à tel objet du savoir] et $R(X,O)$ [rapport personnel à tel objet du savoir] (selon les symboles et les termes utilisés par Chevallard, 1992). Dans ce cas, naturellement, l'expression "objet du savoir" sous-entend l'expression "objet *mathématique* du savoir", ce que Chevallard (1991, page 110) définit:

> "[…] Un objet (par exemple, un objet mathématique) est un *émergent* d'un système de pratiques où sont manipulés des objets matériels qui se découpent dans différents *registres sémiotiques*: registre de l'oral, des mots ou expressions prononcés; registre du gestuel; domaine de la scription, de ce qui est écrit ou dessiné (graphismes, formalismes, calcul, etc.), c'est-à-dire registre de l'écrit".

À la "construction" d'un "concept" participerait donc aussi bien le côté institutionnel (le Savoir) que le côté personnel (de tous ceux qui peuvent accéder à ce Savoir, donc non seulement les savants). Maints Auteurs se trouvent d'accord sur cette position; je me borne à suggérer ici le travail de Godino et Batanero (1994) parce qu'il

s'agit d'un article essentiel dans le débat dans lequel j'essaye de m'insérer, vu qu'il parle justement des rapports entre les significations institutionnelles et personnelles des objets mathématiques.
Mais il n'est pas facile de distinguer le "concept" de sa construction. Et ce n'est peut-être ni possible ni souhaitable car un concept est, pour ainsi dire, continuellement en train de se construire, de se constituer, et dans cette construction même réside la partie la plus problématique et donc la plus riche de sa signification:

concept

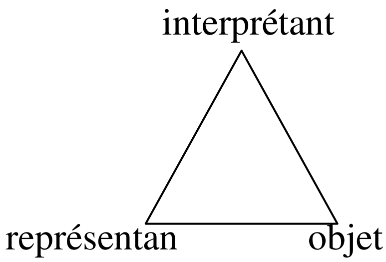
construction construction

signification

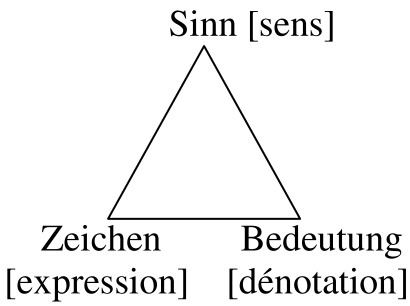
On pourrait appeler cette construction: *conceptualisation,* comme certains auteurs le font; on pourrait aussi s'interroger sur sa nature et se demander comment elle se produit. En essayant d'éclairer cette question, plusieurs chercheurs reconnus ont proposé des hypothèses et des théories desquelles je ne donnerai pas de détails, en renvoyant à D'Amore (1999b) pour une idée d'ensemble; il suffira de rappeler les contributions (souvent ouvertement opposées) de Vygotski, de Piaget, de Gal'perin, de Bruner, de Gagné, … juste pour se limiter aux plus célèbres.
S'engager dans cette aventure conduit à se rendre compte d'une chose au moins: la deuxième question (*Qu'est-ce qu'est* ou *Comment se déroule la conceptualisation*?) reste fondamentalement un mystère…
Un pas important a été tenté par Vergnaud (1990) lorsqu'il a relie le concept à sa composante constitutive. Selon Vergnaud, le point décisif dans la conceptualisation (et dans la didactique, mais il s'agit là d'un discours plus spécifique, sur lequel je vais revenir) est le passage des *concepts-comme-instrument* aux *concepts-comme-objet,* et une opération linguistique essentielle dans cette transformation est la *nominalisation.* Par le terme

“conceptualisation” il désigne justement cette appropriation consciente, en proposant la définition suivante: un concept C est la triade (S, I, *S*) où S est le référent, I le signifié et *S* le signifiant.
L’idée de Vergnaud pourrait être considérée comme une des conclusions possibles d’un courent “classique”, celui qui se réfère aux trois “triangles” (bibliographie spécifique in: D’Amore, 1999b):

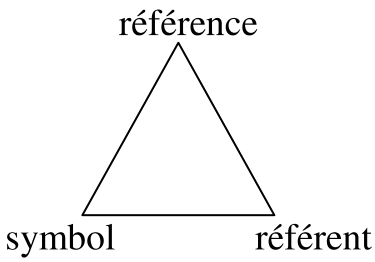
le triangle de Charles Sanders Peirce [1839-1914], presenté en 1883:



le triangle de Gottlob Frege [1848-1925], presenté en 1892:



le triangle de C. K. Ogden et de I. A. Richards, qui aurait dû être une synthèse des deux autres, presenté en 1923:



En fait *approprier* d'un concept (quoi que cela signifie) implique toujours beaucoup plus que *le nommer* (la question remonte au moins au Moyen Age)… (D'Amore, 1999b).
Sans entreprendre ici une théorie générale concertante ces problèmes, on peut déjà faire trois remarques concernantes le cas particulier des mathématiques:

- tout concept mathématique se réfère à des "non-objets"; la conceptualisation n'est donc pas fondée sur des significations se réferant aux réalités concrètes et ne peut pas l'être; en d'autres mots, les références ostensibles ne sont pas possibles dans les mathématiques
- tout concept mathématique doit s'appuyer sur des représentations, vu l'absence d'objets à exhiber à sa place ou à mesure de l'évoquer;[2] la conceptualisation doit donc nécessairement passer par des registres de représentation qui, pour différentes raisons, ne peuvent pas être univoques, surtout s'ils ont un caractère linguistique
- en mathématique on parle plus souvent d' "objets mathématiques" que de concepts mathématiques, car la mathématique étudie de préférence des objets plutôt que des concepts; "La notion d'objet est une notion que l'on ne peut pas utiliser dès que l'on s'interroge sur la nature, sur les conditions de validité ou sur la valeur des connaissances. Ainsi parle-t-on plus souvent d'objets mathématiques que de concepts mathématiques, car ce sont des objets que l'on étudie en mathématiques et non pas des concepts" (Duval, 1998).

Il est tout d'abord nécessaire de rappeler que le terme "concept" comme on l'utilisera dans la suite ne renvoie pas exactementt aux

[2] Ici on entend "objet" dans le sens d' "objet réel" ou de "chose". Dans la *Métaphysique,* Aristote exprime bien ce que cela signifie quand il affirme que la chose, en tant que partie du réel, est ce qui présente les trois caractéristiques suivantes: tridimensionnalité, accessibilité sensorielle multiple (c'est à dire de plusieurs sens à la fois) indépendance des représentations sémiotiques et possibilité de séparation matérielle des autres parties de la réalité, des autres "choses".

mêmes determinations et à la même utilisation chez les auteurs qui parlent de concept et que j'ai cités: Piaget, Kant, Vergnaud, Vygotski, Chevallard. Dans la voie ouverte par Duval la notion de concept, préliminaire, ou prioritaire chez la plupart des Auteurs, devient secondaire, tandis que ce qui acquiert un caractère prioritaire est le couple (*signe*, *objet*), comme je le montrerai à propos du *paradoxe cognitif de la pensée mathématique* qui a été mis en évidence justement par Duval (1993, page 38). Et Duval (1996) cite un texte où Vygotski déclare essentiellement qu'il n'y a pas de concept sans signe :

> "Toutes les fonctions psychiques supérieures sont unies par une caractéristique commune supérieure, celle d'être des processus médiatisés, c'est à dire d'inclure dans leur structure, en tant que partie centrale et essentielle du processus dans son ensemble, l'emploi du signe comme moyen fondamental d'orientation et de maîtrise des processus psychiques (…). L'élément central (du processus de formation des concepts) est l'utilisation du signe, ou du mot, comme moyen permettant à l'adolescent de soumettre à son pouvoir ses propres opérations psychiques, de maîtriser le cours des propres processus psychiques. (…)" (Vygotski, 1962; dans l'ed. française, 1985, aux pages 150, 151, 157).

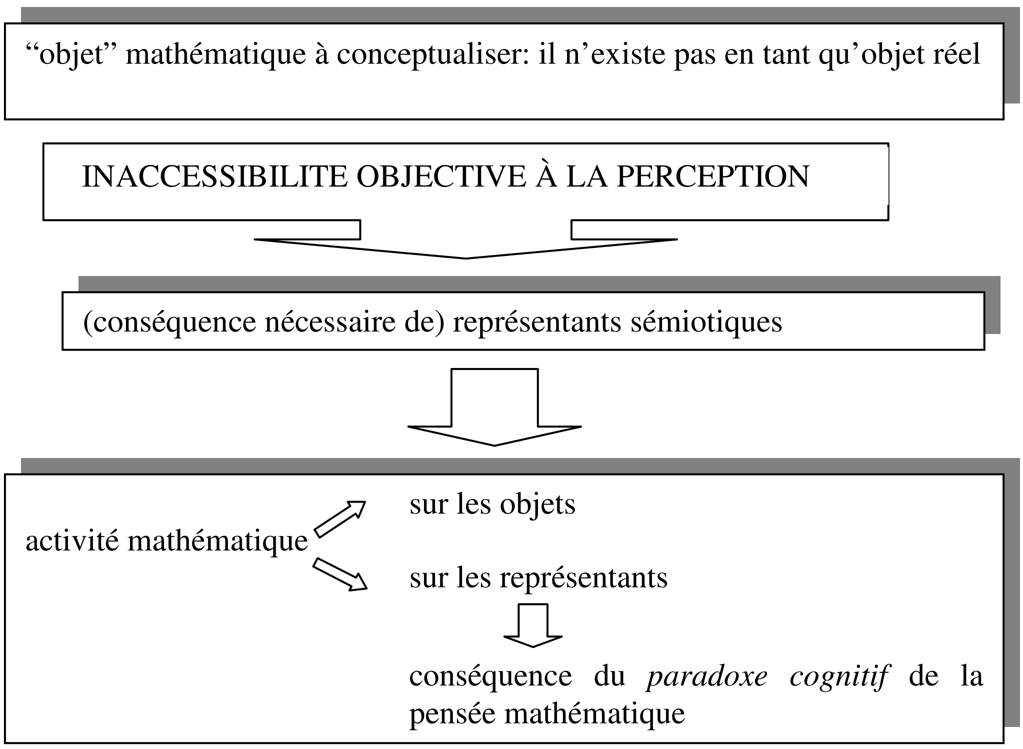
Pour bien comprendre ces remarques de Vygotski il faut revenir sur la notion de "signe". Trop souvent en didactique le signe est confondu avec les symboles conventionnels. Duval affirme que chez certains chercheurs en didactique, le *signe* est réduit aux *symboles conventionnels* qui connotent des objects directement et qui ne dépendent d'aucun système sémiotique.

Pour ce qui concerne De Saussure (1916) (que Vygotski connaissait bien à cause de sa formation de linguiste), il n'y a pas de signe en dehors d'un "système de signes". Par exemple, les mots n'ont de signification qu'à l'intérieur du système d'une langue (d'où les problèmes concernant la traduction). Quand dans Duval (et donc ici) on parle de "registre de représentation sémiotique" on se réfère à un système de signes qui permet d'accomplir les fonctions de communication, traitement et objectivation, et on ne se réfère pas

aux notations conventionnelles qui ne forment aucun système. Par exemple, la numération binaire, ou la numération décimale forment un système, mais les lettres ou les symboles qu'on utilise pour indiquer des opérations algébriques n'en forment aucun. Il faudrait donc sans doute traduire Vygotski, au moins dans ce passage, en demplaçant le mot "signe" par l'expression "système sémiotique".
Il faut remarquer aussi que de ce point de vue et contrairement à l'opinion commune, un système sémiotique n'est pas un instrument: il est constitutif du fonctionnement même de la pensée et de la connaissance. Ce sont les codes utilisés pour recodifier un message déjà exprimé qui peuvent être considérés comme des "outils".

2. Le cas de la mathématique

Le schéma suivant me semble beaucoup plus efficace qu'un long discours:



Voici comment ce *paradoxe* est presenté (Duval, 1993, page 38):

> “(…) d’une part, l’appréhension des objets mathématiques ne peut être qu’une appréhension conceptuelle et, d’autre part, c’est seulement par le moyen de représentations sémiotiques qu’une activité sur des objets mathématiques est possible. Ce paradoxe peut constituer un véritable cercle pour l’apprentissage. Comment des sujets en phase d’apprentissage pourraient-ils ne pas confondre les objets mathématiques avec leurs représentations sémiotiques s’ils ne peuvent avoir affaire qu’aux seules représentations sémiotiques? L’impossibilité d’un accès direct aux objets mathématiques, en dehors de toute représentation sémiotique, rend la confusion presqu’inévitable. Et, à l’inverse, comment peuvent-ils acquérir la maîtrise des traitements mathématiques nécessairement liés aux représentations sémiotiques, s’ils n’ont pas déjà une appréhension conceptuelle des objets représentés? Ce paradoxe est d’autant plus fort que l’on identifie activité mathématique et activité conceptuelle et que l’on considère les représentations sémiotiques comme secondaires ou extrinsèques”.

Dans ce paradoxe, que Raymond Duval met bien en évidence ici, peut-il y avoir une cause potentielle de dévolutions manquées?

L’enseignant, les représentats de la noosphère et l’étudiant lui-même peuvent penser en contact direct avec un “objet” mathématique. Mais, et parfois personne ne semble s’en rendre compte, l’étudiant n’a pas accès qu’à une représentation sémiotique particulière de cet “objet”. L’étudiant n’a pas d’accès direct à l’ “objet”, et ne peut pas l’avoir, tandis que l’enseignant et les représentats de la noosphère croient que l’un lui donne automatiquement l’autre! Et l’étudiant est bloqué, pour ainsi dire, inhibé: il ne peut rien faire, excepté confondre l’ “objet” et sa représentation sémiotique parce qu’il n’a pas les moyens de les distinguer. Et par conséquent, face à l’éxigence conceptuelle qui se manifesterait par exemple avec la nécessité de modifier la représentation sémiotique de ce même objet, l’étudiant ne peut rien faire; l’enseignant et les représentats de la noosphère n’en

comprenant pas la raison ils accusent l'étudiant et deplorent l'absence du transfert ou decontextualisation des connaissances.
En réalité dans cette phase paradoxale personne ne comprend plus ce qui est en train de se passer, dans la mesure où chacun des acteurs de cette aventure a une perception différente du problème.
D'autre part, l'analyse des représentations est un événement nouveau dans l'étude des procès cognitifs. En revanche, elle a été utilisée davantage sur le plan strictement philosophique. Duval (1988) écrit :

> "L'analyse des répresentations a commencé dès que l'on s'est interrogé sur les conditions de validité de la connaissance et que l'on a découverte que toute connaissance est inséparable d'une activité de représentation. La troisième des *Meditationes Metaphysicae* de Descartes est le premier texte où la problématique d'une telle analyse se trouve explicitement développée. Elle se trouve entière centrée sur le contenu des représentations".

Mais avant d'aborder cette question de manière beaucoup plus détaillée et spécifique, je dois expliquer la presence du terme "constructiviste" dans le titre même de ce papier.

3. Apprentissage, constructivisme, symbolisation

Pourquoi avoir mis en avant cet adjectif?
Pour répondre à cette question il nous faut revenir à Kant (Moreno Armella, 1999).
Dans sa *Critique de la raison pure*, Kant postule que la connaissance résulte d'une action du sujet sur des données qu'il va constituer en "objects". Il se sert d'une comparaison: comme un liquide adopte la forme du récipient qui le contient, de même les impressions sensorielles adoptent les formes que les structures cognitives leurs imposent. Ces structures cognitives, et c'est là l'hypothèse kantienne, sont les formes innées de la sensibilité, tels l'espace, le temps, ou des formes conceptuelles telle la causalité, la

permanence de l'objet, permanence et la disponibilité d'expériences précédentes etc.
La connaissance n'est donc plus la banale représentation de la réalité extérieure; elle est le résultat de l'interaction entre le sujet apprenant (ses structures cognitives) et ses "expériences sensorielles". En outre le sujet apprenant abandonne sa passivité typique (qui remonte à Descartes ou à Locke) et construit, structure ses expériences, en participant activement au processus d'apprentissage dans une vraie et propre *construction*. Il s'agit d'une transformation: un objet de connaissance, entrant en contact avec un sujet apprenant, est transformé, reconstruit, grâce aux instruments de connaissance que possède ce dernier.

Pour bien comprendre la position kantienne, je me servirai de Duval (1998). Il est essentiel de comprendre que de Descartes à Kant la problématique commune est celle des rapports entre représentation et objet: on passe du contenu des représentations du sujet aux objets de connaissance (scientifique). Les rapports des répésentations aux objects répésentés sont interpretés selon le schema de la causalité. Pour Descartes le contenu de la répésentation résulte de l'objet. Pour Kant le contenu de la répésentation résulte en grande partie des structures cognitives du sujet. Quelle est en définitive la nature des représentations?[3] Les processus de pensée sont uniquement mentaux, aussi bien chez Descartes que chez Kant, ce qui implique un lien étroit entre les représentations du sujet et les objets, et ce qui permet de negliger le rôle des systèmes sémiotiques de répésentation!
Tout cela constitue, selon Duval (1998), la "première étape"; cette position sera dépassée par une "deuxième étape" de Bolzano aux thèses d'Hilbert en 1904 et puis par une "troisième étape" qui des thèses d'Hilbert en 1922 arrive à Turing et Von Neumann.
Mais revenons à Kant.

---

[3] Il peut être intéressant de voir ce que Kant écrit à propos du mot *représentation*: "Le mot *représentation* est bien compris et employé avec confiance, bien que sa signification ne puisse jamais être explicitée par une définition" (Kant, cit. par Duval, 1998, au début du paragraphe 1).

D’où viennent justement ces instruments de connaissance nécessaires à transformer les expériences du sujet? L’épistémologie kantienne de l’apprentissage, pour utiliser une terminologie moderne, se réfère à un sujet apprenant adulte, déjà doté donc d’un langage développé, aux capacités d’abstraction et de généralisation. Il est licite de se poser la question suivante: comment tout cela changera-t-il si on se réfère à l’apprentissage dans le milieu scolaire, par des jeunes sujets apprenants (enfants, adolescents ou jeunes) faisant leurs premières armes, utilisant des langages encore en train de s’élaborer?

Il n’est pas tout à fait absurde de penser que l’épistémologie constructiviste a pris naissance justement du besoin de répondre à ce problème. Piaget, en 1937, s’exprimait ainsi:

> “[…] La connaissance du monde extérieur débute par une utilisation immédiate des choses […] L'intelligence ne débute ainsi ni par la connaissance du moi ni par celle des choses comme telles, mais par celle de leur interaction, et c'est en s'orientant simultanément vers les deux pôles de cette interaction qu'elle organise le monde en s'organisant elle-même.” (Piaget,1937, page 311).

Le savoir acquis peut donc être vu comme le produit de l’élaboration de l’expérience avec laquelle le sujet apprenant entre en contact; et cette élaboration consiste dans l’interaction entre l’individu et son milieu, et dans la façon dont l’individu intériorise le monde externe. Quelles que soient les particularités de ces “activités”, le sujet apprenant doit s’engager dans des tâches qui le portent nécessairement à symboliser. Il s’agit d’une nécessité typiquement humaine, la seule sur laquelle tous les Auteurs s’accordent! Il s’agit d’une élaboration (aux caractéristiques internes ou sociales ou les deux) s’organisant autour ou à l’intérieur des systèmes sémiotiques de représentation.

On peut dire même plus: que la connaissance commence dans l’invention dans l’utilisation des signes.

Le mécanisme de production et d’utilisation, subjectif et intersubjectif de ces signes, et le mécanisme de représentation des “objets” de l’acquisition conceptuelle sont donc cruciaux pour la connaissance.

Dans ce sens j'accepte et j'acquiers ce que Moreno Armella (1999) énonce comme "un principe qu'il nous semble essentiel de respecter: *toute action cognitive est une action médiate à cause d'instruments matériels ou symboliques*". La connaissance dépend aussi justement de ces instruments de médiation que nous utilisons pour sa construction, et elle dépend de l'ensemble et du type des significations que ces instruments reçoivent de l'entourage social.
Or, tout cela avait déjà été prévu par le programme de l'épistémologie constructiviste, et cela avait été exprimé de la manière suivante:

> "[…]L'action n'a pas lieu seulement en fonction d'impulsion internes […] Dans l'expérience de l'enfant, les situations auxquelles il a affaire sont engendrés par son entourage social, les choses apparaissent dans des contextes qui leur confèrent des significations particulières. L'enfant n'assimile pas des objets "purs" […] Il assimile des situations dans lesquelles les objets jouent un certains rôles et non pas d'autres. Quand le système de communications de l'enfant avec son entourage social devient plus complexe […] ce que nous pourrions appeler l'expérience directe des objets commence à être subordonnée […] au système de significations que lui confère le milieu social" (Piaget, Garcia, 1983, chap. IX, pag. 274).

Le fait que la connaissance à l'école et son apprentissage comme construction soient conditionnés par les situations spécifiques de cette institution est d'une évidence indiscutable. Donc l'apprentissage à l'école n'est pas l'apprentissage tout court! Les problèmes de l'apprentissage mathématique à l'école appartiennent à ce milieu socioculturel spécifique[4] avant de se poser au niveau épistémologique.
Ces quelques considérations auxquelles on peut facilement se rallier aboutissent à certaines réflexions qui se révèlent bientôt nécessaires. Si simplement on transfère, pour ainsi dire, à l'école les thèses de l'épistémologie constructiviste, on se retrouve face à des

[4] Cette perspective socioculturelle tant particulière a remarquablement influencé les études sur l'éducation (Wertsch, 1993).

affirmations du genre: “L’étudiant construit sa propre connaissance”; ou, plus radicalement: “Chaque étudiant construit *sa propre version* de la connaissance”. Mais, vu la spécificité du milieu de l’école, des réponses naissent dont la réponse paraît lointaine; par exemple, comment peut-on vérifier que les constructions du savoir de l’étudiant sont compatibles avec celles de ses camarades, avec les exigences de l’institution, avec les attentes de l’enseignant?

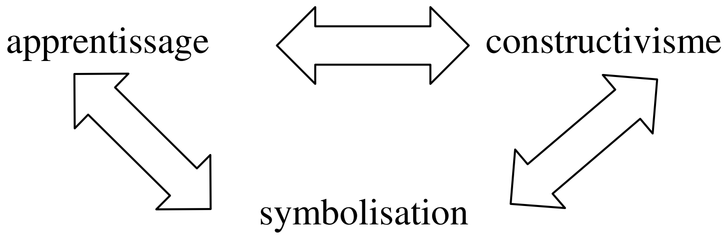
S’il est vrai, et il l’est, que toute connaissance (mathématique en particulier) reflète en même temps une dimension sociale et une dimension personnelle, l’école ne constitue pas une exception, au contraire: elle est le lieu où ce double aspect s’institutionnalise.

Pendant l’apprentissage de la mathématique, on introduit les étudiants à un monde, conceptuel et symbolique (surtout représentatif), nouveau. Ce monde n’est pas le fruit d’une construction solitaire, mais le fruit d’une vraie et propre interaction, très complexe, avec les membres de la microsociété dont fait partie le sujet apprenant: les autres élèves et l’enseignant (et la noosphère, parfois floue, parfois pressante) (Chevallard, 1992). C’est grâce à un continuel débat social que le sujet apprenant devient conscient du conflit entre “concepts spontanés” et “concepts scientifiques”; l’acte d’enseigner ne consiste pas seulement dans la tentative de généraliser, d’amplifier, de rendre plus critique le “sens commun” des étudiants; c’est une action bien plus complexe comme Vygotski nous a enseigné dans *Pensée et Langage* (1962):

> “Les recherches sur le processus de formation des concepts nous ont appris que le concept est non pas un simple ensemble de liaisons associatives assimilé à l'aide de la mémoire, non pas une habileté mentale automatique mais un véritable et complexe acte de pensée […] Le processus de développement des concepts ou des significations de mots exige le développement de toute une série de fonctions (l'attention volontaire, la mémoire logique, l'abstraction, la comparaison et la distinction) et tous ces processus psychiques très complexes ne peuvent être simplement appris et assimilés. […] L'expérience pédagogique nous apprend, non moins que la recherche théorique, que l'enseignement de concepts s'avère

toujours pratiquement impossible pédagogiquement sans profit. Le maître qui tente de suivre cette voie n'obtient habituellement rien d'autre qu'une vaine assimilation de mots, un pur verbalisme, simulant et imitant chez l'enfant l'existence des concepts correspondants mais masquant en réalité le vide.” (pages 211-212)

L’acte d’apprendre semble donc être une **construction** soumise à la nécessité de “socialisation”, ce qui se passe naturellement par un moyen communicatif (par exemple le langage) et ce qui dans la mathématique sera conditionné de manière toujours plus décisive par le choix d’une médiation **symbolique**, c’est à dire par le registre de représentation choisi (ou imposé, à différents titres, même seulement par les circonstances). [Ce qui explique finalement le titre de ce paragraphe].



4. Sémiotique et noétique dans l’apprentissage de la mathématique

Dans le domaine mathématique, l’acquisition conceptuelle d’un objet passe nécessairement par l’acquisition d’une ou plusieurs représentations sémiotiques. Duval l’a dit, en présentant la problématique des registres, dans les célèbres articles de 1988 publiés dans les *Annales* (1988a, 1988b, 1988c) [dont le travail de 1993 constitue la première ébauche d’une synthèse (1993); mais Duval publie des travaux sur cette question en 1989 et en 1990 aussi]; Chevallard (1991), Godino e Batanero (1994) le confirment.

Donc, en reprenant les termes de Duval: **il n'y a pas de noétique sans sémiotique.**

Je vais expliciter les significations de ces termes qui n'ont pas toujours été utilisés dans le même sens. Je n'aurai là aucune prétention exhaustive:

sémiotique $=_{df}$ acquisition d'une représentation réalisée par des signes

noétique $=_{df}$ acquisition conceptuelle d'un objet[5]

J'entendrai, désormais:

$r^m =_{df}$ registre sémiotique (m = 1, 2, 3, …)

$R^m{}_i(A) =_{df}$ représentation sémiotique i-ème (i = 1, 2, 3, …) d'un contenu A dans le registre sémiotique r^m

Sur la base de ces choix on peut remarquer que si le registre sémiotique change, la représentation sémiotique change nécessairement aussi, tandis que le contraire n'est pas toujours vrai: la représentation sémiotique peut changer dans le maintien du même registre sémiotique.

J'utiliserai encore une fois un schéma pour illustrer la question car il me semble plus incisif et efficace :[6]

caractéristiques du fonctionnement cognitif d'un système sémiotique	*représentation* *traitement* *conversion*	ces trois sont des activités cognitives différentes

[5] Pour Platon, la noétique est l'acte de concevoir par la pensée; pour Aristote, l'acte même de compréhension conceptuelle.
[6] Je me réfère à nouveau à Duval (1993).

objet A à représenter

choix des traits caractéristiques de A (en fonction de $R^m{}_i(A)$)

REPRESENTATION $R^m{}_i(A)$ dans un registre sémiotique donné r^m

transformation de représentation $\longrightarrow$ *TRAITEMENT*

nouvelle représentation ($i \neq j$) $R^m{}_j(A)$ dans le *même* registre sémiotique r^m

transformation de registre $\longrightarrow$ *CONVERSION*

nouvelle représentation ($h \neq i$, $h \neq j$) $R^n{}_h(A)$ dans un *autre* registre sémiotique r^n ($n \neq m$)

($m, n, i, j, h = 1, 2, 3, \ldots$)

Il faut remarquer les flèches qui, dans la première partie du schéma vont du bas en haut. Leur raison d'être est la suivante: les traits distinctifs retenus de A dépendent des capacités sémiotiques de représentation du registre choisi. En choisissant un registre différent on mettrait en avant d'autres traits de A. Cela dépend du fait que deux représentations du même objet dans des registres différents ont des contenus différents.

Caractéristiques de la noétique

L'acquisition conceptuelle d'un objet mathématique se fonde sur deux caractéristiques "fortes" de cet objet (Duval, 1993):

1. l'utilisation de plusieurs registres de représentation sémiotique est typique de la pensée humaine
2. la création et le développement de nouveaux systèmes sémiotiques est le symbole (historique) du progrès de la connaissance.

Ces considérations montrent l'étroite interdépendance entre noétique et sémiotique, dès qu'on passe de l'une à l'autre: non seulement donc il n'y a pas de noétique sans sémiotique, mais la sémiotique est assumée comme une caractéristique nécessaire à garantir le premier pas vers la noétique.

À ce point, une précision concernante la théorie que Raymond Duval est en train de développer depuis des années se rend nécessaire.

Dans cette théorie on accorde à la conversion une place centrale par rapport aux autres fonctions, et en particulier par rapport à celle de traitement qui est considérée par la plupart comme étant décisive du point de vue mathématique.

Pourquoi? A mon avis, pour au moins trois différentes raisons:

1. La conversion se heurte à des phénomènes de non congruence qui ne sont pas conceptuels (en tant que liés au sens même de la conversion). Ces phénomènes de non congruence constituent l'obstacle le plus stable qu'on puisse observer dans l'apprentissage de la mathématique, à tous les niveaux et dans tous les domaines.

2. La conversion permet de définir des variables cognitives indépendantes, ce qui rend possible la construction d'observations et d'expériences relativement précises et fines. Certes, une fois validées à travers une recherche très méthodique elles peuvent ensuite être utilisées comme des variables didactiques. Duval ne travaille donc pas au niveau d'une classe pendant des semaines, il se comporte plutôt comme le font un biologiste ou un médecin quand ils veulent comprendre le fonctionnement du cerveau.

3. La conversion, dans les cas de non congruence, suppose une coordination des deux registres de représentation mobilisés; cette coordination n'est jamais donnée à priori et elle ne se construit pas spontanément en se basant seulement sur le fait que des activités mathématiques didactiquement intéressantes sont effectuées. Ce qu'on appelle "conceptualisation" ne commence réellement que

quand se met en marche, fut-il à l'état d'ébauche, la coordination de deux différents registres de représentation.

La théorie des registres doit être évaluée en se fondant sur les apports relatifs à la richesse, à la nouveauté des observations, ainsi qu'à la nouveauté des activités d'apprentissage que les variables cognitives permettent de définir; et non pas par rapport à des idées reçues sur ce qu'est la mathématique, ni sur la base de considérations globalisantes qui ne sont pas contrôlables avec des méthodologies précises.
C'est chaque élève qui apprend, et personne ne peut apprendre (ou comprendre) à la place d'un autre! En outre, le succès d'une action didactique ne se juge pas immédiatement, mais seulement quelques années plus tard: il y a nombre de réussites immédiates qui se révèleront être des échecs à moyen ou long terme.

Voilà donc pourquoi Duval insiste sur le caractère central de la conversion; voilà ce qui est le noyau qui fait véritablement la différence entre sa théorie des registres et tout ce qui peut se dire ou tout ce qu'on a l'habitude de dire sur les signes et sur la sémiotique ou sur ce qui est cognitif.
Mais ce point-là devra être éclairé de manière beaucoup plus approfondie dans le futur…

5. Construction de la connaissance mathématique et registres de représentation sémiotique: une tentative de "définition" de ce qu'est "construire"

La construction des concepts mathématiques dépend donc étroitement de la capacité d'utiliser *plusieurs* registres de représentations sémiotiques de ces concepts:

❶ de les *représenter* sur un registre donné
❷ de *traiter* ces représentations à l'intérieur d'un même registre

❸ de *convertir* ces représentations d'un registre donné à un autre

L'ensemble de ces trois éléments et les considérations faites aux paragraphes **2** et **3** mettent en évidence l'étroit lien entre noétique et constructivisme: cette "construction de la connaissance en mathématique" n'est-elle pas justement l'union de ces trois "actions" sur les concepts, c'est à dire l'expression même de la capacité de *représenter* les concepts, de *traiter* les représentations obtenues à l'intérieur d'un registre établi et de *convertir* les représentations d'un registre à un autre?
C'est comme si on était en train de spécifier les opérations de base qui dans leur ensemble définissent cette "construction", laquelle autrement resterait un terme mystérieux et ambigu, ouvert à toute sorte d'interprétations, même métaphysiques.[7]
Il faut remarquer encore que d'un point de vue cognitif on doit accorder plus d'importance au point 3 (la conversion) qu'au point 2 (le traitement) parce que cela permet de définir les variables indépendantes aussi bien pour l'observation que pour l'enseignement.
Mais d'un point de vue mathématique on accorde d'habitude plus d'importance au traitement qu'à la conversion. Et c'est pour cela qu'au cours de l'histoire les mathématiciens ont développé des registres spécifiques qui ont permis des différentes formes de calcul (arithmétique, algébrique, analytique, logique,…).

6. Scolarisation et noétique manquée

Le renoncement (naturellement inconscient) de l'étudiant à la dévolution, l'incapacité de l'étudiant à s'investir (ce qui est souvent une conséquence de tentatives échouées), en assumant directement

[7] Naturellement cette observation, tout le paragraphe, mais aussi cet article dans son intégrité, ont été élaborés de manière spécifique pour la mathématique; je ne peux pas évaluer jusqu'à quel point ils peuvent s'appliquer à une théorie des concepts, ou, même, à une gnoséologie.

et personnellement la responsabilité de la construction de la connaissance au sein du milieu scolaire, sont liées à l'incapacité (parfois seulement supposée) de représenter, de traiter, ou bien de convertir, à cause d'un manque didactique spécifique originel. L'enseignant pourrait en effet ne pas mettre en oeuvre chacune des composantes de la construction en supposant une identité de sémiotique et noétique (Duval, 1993) (il s'agit là d'une opinion très répandue parmi les enseignants, spécialement parmi ceux qui n'ont jamais eu l'occasion de réfléchir sur cette question, ou qui la considèrent superflue).[8] Cela pourrait amener l'étudiant à une scolarisation des connaissances (D'Amore, 1999a),[9] qui conduit à l'échec.

Une réflexion s'impose sur l'impossibilité d'une noétique sans sémiotique préalable dans l'apprentissage mathématique conceptuel. En effet, l'acquisition d'un concept mathématique C n'est que l'acquisition de l'une de ses représentations sémiotiques $R^m{}_i(C)$ dans un registre sémiotique donné r^m; en fait, seulement à travers cela C se "manifeste" tout en se rendant disponible à la construction de l'apprentissage au sens qu'on a expliqué.[10]

[8] Ce qui renvoie à un discours beaucoup plus général, celui sur les croyances implicites de l'enseignant, affronté de manière profonde, systématique et recourante en (Speranza, 1997).

[9] "J'entends ici me référer par le terme "scolarisation du savoir" à cet acte largement inconscient par lequel l'élève à un certain moment de sa vie sociale et scolaire (mais presque toujours au cours de l'école primaire) délègue à l'école (en tant qu'institution) et à l'enseignant (en tant que représentant de l'institution) la tâche de *sélectionner pour lui les connaissances significatives* (celles qui le sont d'un point de vue social, par un statut reconnu et légitimé par la noosphère) en renonçant à assumer directement leur choix sur la base d'une forme quelconque de critère personnel (goût, intérêt, motivation,…). Du moment où cette scolarisation comporte la reconnaissance de l'enseignant comme dépositaire des connaissances, du savoir socialement valables, il est évident qu'il y aura, plus ou moins en même temps, une scolarisation des rapports interpersonnels (entre l'étudiant et l'enseignant et entre l'étudiant et ses copains) et du rapport entre l'étudiant et le savoir: c'est ce qui (…) s'appelle "scolarisation des relations"." (D'Amore, 1999a).

[10] À mon avis, ceci est un noyau essentiel à traiter dans les cours pour la formation des enseignants, tout en l'enrichissant d'exemples significatifs.

Mais il y a plus: quel que soit le $R^m{}_i(C)$ en r^m, il ne donne pas toutes les références (sémiotiques) de C en r^m (la représentation sémiotique d'un concept n'est jamais univoque); il y aura d'autres représentations sémiotiques $R^m{}_h(C)$ $(h \neq i)$ de C en r^m. (On passe de l'une à l'autre avec une transformation de traitement).
On peut donc parler de C^m: concept C représenté en r^m, c'est à dire "limité" à son aspect "relatif" au registre sémiotique r^m.
C^m peut s' "apprendre" en r^m mais ce qu'on obtient n'est qu'une partielle approximation à C, disons: une partielle "construction" de C.
Pour arriver à la compréhension de C il faut s'approprier les conversions portant de $R^m{}_i(C^m)$ en r^m à $R^n{}_j(C^n)$ en r^n, pour chaque m et n: cela rend possible le choix d'un registre au lieu d'un autre, face à n'importe quelle situation relative à C.

Venons en maintenant à l'énoncé fondamental constituant le pivot de tout le système que je suis en train de décrire: **il n'y a pas de noétique sans sémiotique**.
Pour renforcer le "jeu des triades" (représentation, traitement, conversion), on peut voir quelle est l'issue de la recherche décrite dans D'Amore (1998). Dans cette recherche le même message concernant une situation relative à un simple exemple de relation binaire (on donnait des noms de villes et des noms d'états et la relation binaire était: "est en"), était proposé à des élèves de différents niveaux scolaires, dans des différents registres sémiotiques, et avec des différentes représentations sémiotiques, et ce qu'on demandait était justement de reconnaître qu'il s'agissait du *même message*, de la *même information*.
Le résultat de cette recherche montre justement les difficultés rencontrées par les étudiants

- à remonter du contenu d'une représentation à l'objet représenté
- à percevoir la transformation de type traitement permettant de passer d'une réprésentation à une autre qui est donnée dans le même registre
- à voir qu'une réprésentation donnée dans un registre n'est que la conversion d'une autre réprésentation du même objet dans un autre registre.

Faute de clés de lecture, et ayant des difficultés dans la “lecture” des situations, les étudiants donnent un “sens” au message en créant des informations de types différents (que dans quelque cas j’ai appelé “informations parasites”) parfois éloignées de toute intention communicative de l’auteur; et ils cherchent des indications de traitement ou de conversion dans des aspects tout à fait marginaux, tels: la forme des schémas, le type d’images présenté etc., ce qui est non pertinent pour l’enseignant.

7. Exemples

Avant de présenter quelques exemples de façon détaillée quelques remarques sont indispensables.

La première concerne la langue naturelle en tant que registre.
Tout en acceptant la langue naturelle comme registre, il faut quand même préciser de façon explicite qu’il s’agit d’un registre plus complexe que les autres. Premièrement, ce registre permet des fonctionnements du discours (et donc des traitements) très hétérogènes. Il existe ainsi un fonctionnement spontané tel celui des conversations, des narrations, des discussions, mais il existe aussi un fonctionnement spécialisé qu’on retrouve, par exemple dans le raisonnement déductif en mathématique, et qui est tout à fait différent. Voilà pourquoi Duval (1995, pages 91 et suivantes) distingue quatre fonctions du discours caractérisantes tout registre s’appelant “langue”:

- fonction référentielle de désignation des objets,
- fonction apophantique d’expression d’énoncés complets,
- fonction d’expansion discursive d’un énoncé complet et
- fonction de réflexivité discursive.

En d’autres mots la langue naturelle, contrairement à presque tous les autres registres, est multifonctionnelle (Duval, 1996, III partie).

La deuxième concerne la manière dont les signes et les réprésentations sont introduites: isolèment comme des simples conventions ou comme un système dont il faut decouvrir le fonctionnement?
Même si dans les exemples qui suivent on va s'en tenir uniquement au premier mode d'introduction, dans le seul but d'illustrer certains points, on devrait en réalité toujours tendre à présenter le système ou les systèmes que les représentations forment et dans lesquels elles fonctionnent en tant que représentations. Cela est très facile pour le système d'écriture des chiffres, pour les figures géométriques; mais beaucoup moins pour les écritures algébrique et logique. La raison de cette différence est la suivante. L'intérêt d'un système sémiotique en mathématique est avant tout celui de permettre un traitement (mathématique) des représentations. Il faut donc le présenter, dans la mesure du possible, par rapport au jeu de transformations internes qu'elles permettent. Et, de ce point de vue, la langue et les figures géométriques ne sont pas du tout, proprement parlant, des registres "techniques". Cela correspond à la distinction entre les structures de signification ternaire (langues et formes) et binaires (pour lesquelles les "triangles" montrés dans le cadre du premier paragraphe sont des faux schémas).
Seulement en tenant compte des fortes limitations que les deux notes précédentes imposent, il est sensé d'accepter les exemples suivants qui n'ont qu'un but explicatif.

concept C

registre sémiotique r^1: la langue commune
représentation sémiotique $R^1{}_1$: le milieu
représentation sémiotique $R^1{}_2$: la moitié
etc.

registre sémiotique r^2: les systèmes de designation du nombre
représentation sémiotique $R^2{}_1$: ½ (écriture fractionnaire)
représentation sémiotique $R^2{}_2$: 0.5 (écriture décimale)
représentation sémiotique $R^2{}_3$: $5 \cdot 10^{-1}$ (écriture exponentielle)
etc.

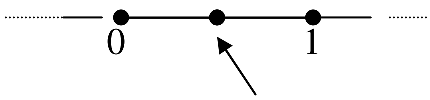
registre sémiotique r^3: écriture litterale et langue formelle

représentation sémiotique R^3_1: $\{x \in Q^+ / \ 2x\text{-}1=0\}$ (écriture des ensembles)

représentation sémiotique R^3_2: y=f(x): $x \rightarrow x/2$ (écriture fonctionnelle)

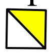
etc.

registre sémiotique r^4 : les figures géometriques ou constructibles à l'aide d'un instrument

représentation sémiotique R^4_1: 

etc.

registre sémiotique r^5: schémas pictographiques

représentation sémiotique R^5_1: 

représentation sémiotique R^5_2: 

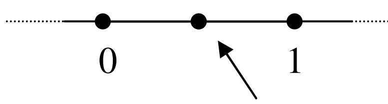
représentation sémiotique R^5_3: 

etc.

½ → transformation de traitement en r^2 → 0.5

0.5 → transformation de traitement en r^2 → $5 \cdot 10^{-1}$

etc.

½ → transformation de conversion de r^2 à r^4 → 

etc.

D'autres exemples peuvent être tirés de ce qu'on appelle "théorie des ensembles" élémentaire ou naïve, dans laquelle le même ensemble peut être représenté dans des différents registres sémiotiques et, à l'intérieur de chacun de ces registres, en utilisant de différentes représentations sémiotiques.

8. La dévolution manquée, la cessation de l'implication

Dans le cas d'un échec dans la gestion de cette énorme quantité de représentations et de transformations il serait trop banal et simpliste de se limiter à une constatation, comme parfois l'enseignant déçu par l'apprentissage manqué de ses élèves semble faire. Où se niche la *motivation* de cet échec? Cet aspect est déjà plus intéressant qu'une analyse des différents échecs et il pourrait nous révéler beaucoup.

Mais ici c'est la problématique de la dévolution manquée, de la cessation d'une implication personnelle qui m'intéresse.
Je pense à un étudiant même doué, même conscient, même sensible, qui, peut-être justement à cause de cette sensibilité qu'il n'arrive pas à satisfaire, ou à cause d'une incapacité d'introspection dont il n'est pas responsable, se borne à observer et à constater son propre échec dans la tentative de faire face à la complexité de l'appel de la triade "représentation, traitement, conversion". L'étudiant pourrait décider (fut-ce de manière tout à fait inconsciente) de se masquer son incompréhension en acceptant le formalisme, la surface de ce qu'on lui demande, en s'adaptant à scolariser son savoir et son comportement c'est à dire en adoptant la médiation totale de l'enseignant par rapport à l'objet de connaissance, en adoptant ses choix et même ses goûts (D'Amore, 1999a). Une analyse très juste des différentes composantes, et donc la capacité de faire le point des différents aspects dans lesquels se représente la construction de la connaissance (dans notre cas spécifique, dans l'exemple donné en

7., le concept ayant ½ comme un de ses nombreux représentants), pourrait aider l'enseignant à comprendre où a commencé la résignation, la dévolution manquée, la cessation de l'implication personnelle de l'étudiant dans cette construction.

Il existe une énorme différence entre d'un côté l'institutionnalisation de la connaissance de la part de l'enseignant en tant que représentant de l'institution qui a décidé quel est le savoir qui compte; et de l'autre la scolarisation, l'acceptation passive des choix de l'enseignant.

- Dans le premier cas l'enseignant joue le rôle de médiateur entre l'élève et le savoir et il rend actif le premier: il consacre les choix et les "découvertes" de l'élève en leur reconnaissant un statut institutionnel d'employabilité et un permis officiel d'emploi; le fondement de tout cela réside dans le fait que c'est l'élève qui construit.
- Dans le deuxième cas l'enseignant joue le rôle de médiateur totalisant et il rend l'élève un sujet passif: il lui demande une confiance aveugle dans l'institution en échange de promesses sur des capacités et des compétences futures qui n'arriveront pas forcément ou qui ne seront pas forcément employables. L'élève cesse là de construire, en cessant donc d'apprendre.

Je crois que l'étude détaillée de la triade (représentation, traitement, conversion) peut s'appliquer à l'analyse des situations de dés-implication personnelle, pour mettre à jour les raisons qui provoquent ce renoncement, et la scolarisation des connaissances.

Appendice: Relativité des signes et dialectique signe/registre

Ceux qui étudient ce genre de problèmes peuvent se poser une question de nature théorique: l'identification d'un registre de représentation sémiotique peut-elle se faire ou se déduire à partir de la seule *forme* visuelle d'une représentation donnée? Autrement dit, si je vois un symbole, un dessin, une formule, une écriture comme

une représentation sémiotique $R^x_y(C)$ d'un "objet" ou concept C donné, puis-je établir avec certitude à quel registre sémiotique cette représentation appartient?
À mon avis, on ne le peut pas toujours car il y a certaines formes ou unités visuelles qui peuvent être employées pour désigner des objets différents et constituer des représentations de registres différents. Pour les reconnaître il faut soit posséder des indications préliminaires sur l'objet représenté soit prendre en compte le contexte proche des autres signes dans lequel ces formes visuelles sont employées.

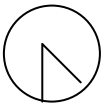
Voici quelques exemples de représentations sémiotiques dont l'aspect purement visuel se prête à des différentes interprétations dues au registre dans lequel on pense devoir les interpréter.

$\square$	"carré": dans le registre géométrique figuratif "il faut que": dans le registre de l'écriture formelle de la logique modale

$<$	"mineur": dans le registre d'écriture de l'arithmétique "angle": dans le registre figuratif géométrique

$\mid\;\mid$	"valeur absolue": dans le registre d'écriture algébrique "couple de droites parallèles": dans le registre symbolique géométrique élémentaire

$\wedge$	"angle": dans le registre figuratif géométrique "et": dans le registre d'écriture formelle de la logique énonciative

	“1/8”: dans le registre schématique pictographique référé à des fractions “45°”: dans le registre figuratif géométrique synthétique “secteur circulaire”: dans le registre figuratif géométrique synthétique

+	“plus”: dans le registre de l’écriture arithmétique “axes cartésiens non orientés”: dans le registre figuratif géométrique analytique “droites perpendiculaires”: dans le registre figuratif géométrique synthétique

×	“fois”: dans le registre écriture arithmétique “droites incidentes”: dans le registre figuratif géométrique synthétique

→	“vecteur”: dans le registre de l’algèbre linéaire ou de la physique ou de la géométrie “indicateur”: dans un registre schéma “implication matérielle”: dans le registre logique formel ou mathématique

∅	“vide”: dans le registre de l’écriture ensembliste “zéro”: dans le registre de l’écriture numérique des informaticiens “1/2”: dans le registre schématique pictographique de l’écriture fractionnaire

etc.

Une forme ou une untié visuelle, considérée isolément c'est-à-dire independamment du contexte dans lequele elle se trouve associée à une autre forme ou à une autre unité visuelle, ne peut donc pas fonctionner comme représentation à moins qu’on ne spécifie soit le registre de représentation, le message soit l'objet que l'on veut représenter. En d'autres termes certaines formes ou unités visuelles peuvent être des signes relevant de systèmes différents selon le signifié dont elles deviennent le signifiant, dans la mesure où le signifié se réduit à la seul désignation d'un objet.

Le choix de ces exemples permet de mettre en évidence une confusion, très répandue, entre:

- signe (unité élémentaire de représentation)
- système de signes ou registre (c'est à dire: l'ensemble des relations d'oppositions dans lequel des unités ou des formes visuelles prennent valeur de signe).

Les exemples précédents montrent qu'une forme peut se retrouver dans des registres differents; mais une forme ne devient des signe que dans un système où elle se trouve en relation distinctive avec d'autres formes (De Saussure, 1915): on peut retrouver la même association de lettres dans deux langues differentes, mais selon la langue ce ne sera pas le même mot.
En outre il faut noter que la représentation de certains objets requiert que l'on combine plusieurs signes ou plusieurs unités de sens élémentaires et que c'est cette combinaison, ou cette composition, qui référe à un objet et non pas chacune des unités élémentaires.

Dans les exemples précédents on a pris le cas très particulier où:

- une même unité visuelle se retrouve dans deux systèmes de repésentation, avec évidemment des significations hétérogènes ne renvoyant pas à des objets d'un même domaine (symboles d'opérations arithmétiques ou tracés de configurations géométrique d'incidence!)
- une unité élementaire est prise pour désigner un objet un peu comme dans le cas des noms propres dans la langue. Elle devient ainsi une repréntation.

Donc, il s'agit de cas particuliers dans lesquels il y a une double "fusion" entre:

unité et représentation
signification et référence à un objet.

Bibliographie

Chevallard Y. (1991). Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble*. Année 1990-1991, LSD2, IMAG, Université J. Fourier, Grenoble, 103-117.

Chevallard Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 12, 1, 73-112.

D'Amore B. (1998). Oggetti relazionali e diversi registri rappresentativi: difficoltà cognitive ed ostacoli. *L'educazione matematica*, 1, 7-28 [texte bilingue, en italien et en anglais]. En espagnol: *Uno*, 15, 1998, 63-76.

D'Amore B. (1999a). Scolarizzazione del sapere e delle relazioni: effetti sull'apprendimento della matematica. *L'insegnamento della Matematica e delle scienze integrate*. 22A, 3, 247-276.

D'Amore B. (1999b). *Elementi di Didattica della Matematica*. Bologna, Pitagora.

De Saussure F. (1915), *Cours de linguistique générale*. Paris et Lausanne, Payot. [5[a] édit. 1960].

Duval R. (1988a). Ecarts sémantiques et cohérence mathématique. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*. 1, 7-25.

Duval R. (1988b). Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*. 1, 57-74.

Duval R. (1988c). Graphiques et équations. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*. 1, 235-253.

Duval R. (1993). Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, ULP, IREM Strasbourg. 5, 37-65.

Duval R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne, Peter Lang.

Duval R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ? *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 16, 3, 349-382.

Duval R. (1998). Signe et objet (I). Trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentation et objet. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. 6, 139-163.

Godino J.D. & Batanero C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 3, 325-355.

Moreno Armella L. (1999). Epistemologia ed Educazione Matematica. *La matematica e la sua didattica*, 1, 43-59.

Perrin Glorian M.-J. (1994). Théorie des situations didactiques: naissance, développement, perspectives. In: Artigue M., Gras R., Laborde C. & Tavignot P. (eds.) (1994), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud*. Grenoble, La Pensée Sauvage. 97-148.

Piaget J. (1937). *La construction du réel chez l'enfant.* Neuchâtel, Delachaux et Niestlé.

Piaget J. & Garcia R. (1983). *Psychogenèse et histoire des sciences*. Paris, Flammarion.

Speranza F. (1997). *Scritti di Epistemologia della Matematica*. Bologna, Pitagora.

Vergnaud G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19, 133-169.

Vygotskij L. (1962). *Thought and Language*. Cambridge, MIT Press. [Ed. française: 1985, Paris, Editions Sociales]. [Ed. italienne: 1990, Bari, Laterza].

Wertsch J. (1993). *Voces de la mente*. Madrid, Visor.

J'exprime ma sincère gratitude à **Raymond Duval**, lecteur patient des versions précédentes de cet article, qui m'a suggéré de modifications et intégrations, qui m'a conseillé des textes inclus maintenant dans la bibliographie et qui, plus généralement, est en train de me guider dans ce genre d'études.